DEV : SO(3) SIMPLE

Ref : NH2G2 Tome 2 p18
CVA p

Soit $H \triangleleft SO(3)$, $H \neq \{id\}$. On mq $H = SO(3)$. Il suffit de montrer que $SO(3) \subset H$ et puisque SO(3) est engendré par les retournements (1), il suffit de mq H les contients tous.

En fait, on montre que H contient un retournement et qu'ils sont tous conjugués

En effet, soit h_D un retournement d'axe D dans H. Soit D' une droite de $\mathbb{R}^3$. Comme SO(3) $\mathrel{\circlearrowright}$ S^2 transitivement (2), il existe $g \in SO(3)$ tq $g(D) = D'$

On peut relier tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ à un autre par un élément de SO(3). Un vecteur définissant une droite le résultat suit

Alors :

$$g h_D g^{-1} \underset{(3)}{=} h_{g(D)} = h_{D'}$$

Ceci étant vrai pour toute droite D' de $\mathbb{R}^3$, cela mq tous les retournements sont conjugués à h_D. Or $h_D \in H$ qui est distingué dans SO(3), donc (4) il contient la classe de conjugaison de h_D à savoir tous les retournements.

Reste à trouver un retournement dans H.
Soit $h \in H$, $h \neq id$. On pose :

$$\varphi : SO(3) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g \longmapsto tr(ghg^{-1}h^{-1}) \overset{(5)}{=} 1 + 2\cos\theta$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ tq $ghg^{-1}h^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} P^{-1}$, $P \in O(3)$

On remarque que φ est continue et $SO(3)$ est connexe (6), compact (7) et contient l'id. Donc (8)
$\varphi(SO(3)) = [a, 3]$ où $a \leq 3$.

Si $a = 3$ alors : $\varphi(SO(3)) = [a,3] = \{3\}$.

$\forall g \in SO(3) \quad \varphi(g) = 1 + 2\cos\theta = 3$

$\Leftrightarrow \cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 \; [2\pi]$

càd, pour tout $g \in SO(3)$, $ghg^{-1}h^{-1}$ est une rotat° d'angle 0 à savoir id.
Dans ce cas, h commute donc à tout éléments de $SO(3)$, càd, $h \in Z(SO(3)) = \{id\}$ (9)
ce qui est absurde puisqu'on a supposé $h \neq id$.

$\forall g \in SO(3) \quad ghg^{-1}h^{-1} = id$
càd $\forall g \in SO(3) \quad gh = hg$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$a < 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 3$$

Un tel n existe puisque $\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante strictement de limite 3.

Il existe $g_n \in SO(3)$ tel que :

$$\varphi(g_n) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

$1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \in [a, 3] = \varphi(SO(3))$

Alors :

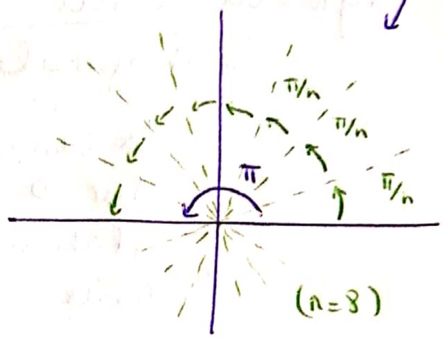
$$h_n := g_n h g_n^{-1} h^{-1}$$

est une rotation d'angle $\pm \frac{\pi}{n}$. D'où :

$$h_n^n = (\underbrace{g_n h g_n^{-1}}_{\in H} \underbrace{h^{-1}}_{\in H})^n$$

On applique n fois une rotation d'angle $\frac{\pi}{n}$, ça donne au final une rot de π

est une rotation d'angle $\pm\pi$ dans H, car $H \lhd SO(3)$.



COMPLÉMENTS DE PREUVE :

Les retournements [NH2G2-II] p15.

DEF : un retournement orthogonal, dans un espace euclidien, est un endomorph u tel que :

$$\begin{cases} u_{|F} = id_F \\ u_{|F^\perp} = -id_{F^\perp} \end{cases}$$

où F est un sous-espace de codimension 2.

($\dim(F^\perp) = 2$)

Autrement dit, c'est un endomph dont la matrice dans une base orthonormée est :

$$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad \text{si } n = \dim E$$

Ainsi dans $\mathbb{R}^3$, un retournement u a pour matrice.

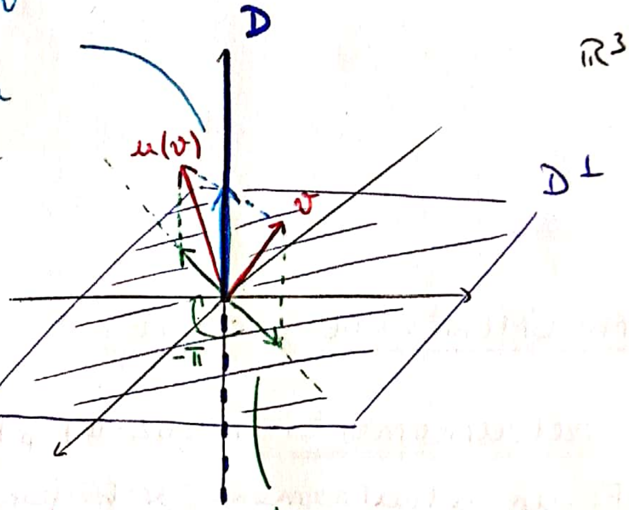
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

symétrie dans le plan orthogonal.

vecteur directeur de la droite stabilisé

C'est un endomorph qui stabilise une droite : l'axe du retournement, et qui effectue une symétrie orthogonale sur le plan orthogonal à cette droite.

La composante de v sur D est stabilisée, elle reste unchangée



la composante de v sur $D^\perp$ subie une rotat° de $\pm\pi$ càd une symétrie dans le plan

Idée

Comme son nom l'indique, on peut comprendre intuitivement le retournement des $\mathbb{R}^3$ comme si une personne qui tient une epée faisait un demi-tour sur elle-m̂.

La droite stabilisée est l'axe engendrée par le corps de la personne. Le plan orthogonal est le sol. L'épée représente le vecteur v.

Finalement, un retournement u d'axe D est caractérisé par :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \qquad u(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in D \\ -v & \text{si } v \in D^\perp \end{cases}$$

Les rotations :

DEF : Dans un espace euclidien de dimension 2 ou 3 une rotation est un endomph de $SO(E)$.

C'est donc un endomph qui préserve le produit scalaire et l'orientation.

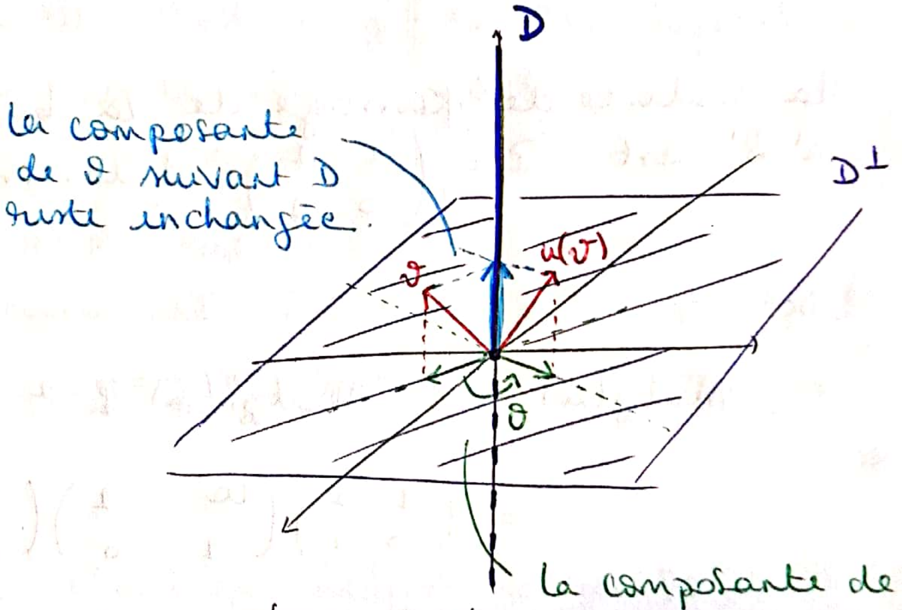
Dans $\mathbb{R}^3$, la matrice d'une rotation dans une base orthonormée est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{matrix}} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

axe stabilisé

rotation d'angle θ dans le plan orthogonal à l'axe.

où $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de rotation.



La composante de v suivant $D^\perp$ subit une rotation d'angle θ.

On remarque que un retournement est une rotation d'angle $\pm\pi$ dans $\mathbb{R}^3$.

⚠ IMPORTANT

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation dans $\mathbb{R}^2$ seulement si c'est la matrice d'un endo <u>dans une base orthonormée</u>

Un endomph $u : E \to E$ peut admettre pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =: R_\theta$ sans être une rotation.

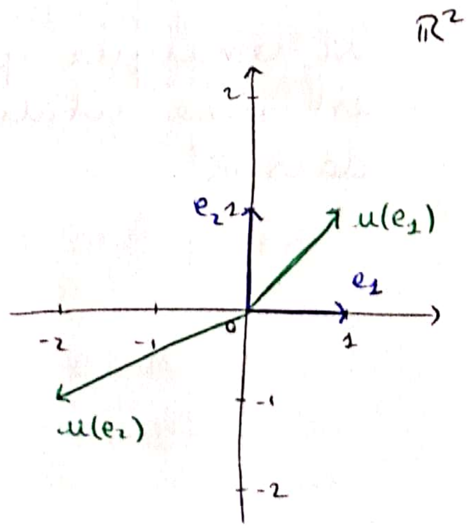
Csd $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{2}}$$

La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dc.

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) &= P \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) \, P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Dc : $u(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$; $u(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

② $SO(n)$ agit transitivement sur la sphère de $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{S}^{n-1}$

RAPPEL : Action transitive [NH2G2-I]

Si un groupe G agit sur un ensemble X :

$$\begin{aligned} G \curvearrowright X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

On dit que l'action est transitive si elle admet une seule orbite, càd,

$$\forall x \in X \qquad G \cdot x := \{ g \cdot x : g \in G \} = X \qquad ①$$

Ceci est équivalent à dire que.

$$\forall x, y \in X \quad \exists g \in G \qquad y = g \cdot x \qquad ②$$

En effet, suppose ①. Soit $x, y \in X$. Par hypothèse, $G \cdot x = X$ donc en particulier $y \in X = G \cdot x$. de il existe $g \in G$ tq. $y = g \cdot x$.

Suppose ②. Soit $x \in X$. Par def de $G \cdot x$ on a $G \cdot x \subset X$. Réciproquement, soit $y \in X$. Par ②, il existe $g \in G$ tq. $y = g \cdot x \in G \cdot x$. D'où : $X \subset G \cdot x$.

■

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cod l'action naturelle de $SO(n)$ sur la sphère :

$$\begin{aligned} SO(n) \curvearrowright \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow S^{n-1} \\ (P, x) &\longmapsto Px \end{aligned}$$

multiplication matricielle

Soit $x, y \in S^{n-1} := \{ z \in \mathbb{R}^n : \|z\| = 1 \}$. On complète ces deux vecteurs en deux bases orthonormées directes. notées $\mathcal{B}_x$ et $\mathcal{B}_y$

Ceci est possible puisque, dans un espace euclidien, par le procédé de Gram-Schmidt on peut orthonormaliser toute base. Et si la base est indirecte, il suffit de changer un vecteur en son opposé.

Idée :

$x \in S^{n-1} \underset{\text{en base}}{\overset{\text{complète}}{\rightsquigarrow}} (x, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ base

$\underset{\text{Schmidt}}{\overset{\text{Gram-}}{\rightsquigarrow}} (x, e_2, \dots, e_n)$ base orthonormée.

Si $\det(x, e_2, \dots, e_n) > 0$, ok

Sinon choisir base $(x, e_2, \dots, -e_n)$ qui reste orthonormée et

$$\det(x, e_2, \dots, -e_n) \underset{\substack{\text{par multilin}\\ \text{du det}}}{=} - \underbrace{\det(x, e_2, \dots, e_n)}_{<0} > 0.$$

On a donc 2 bon directs $\mathcal{B}_x$, $\mathcal{B}_y$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_x$ à $\mathcal{B}_y$. Alors

$$(\star) \begin{cases} P \in SO(n) \\ Px = y \end{cases}$$

Ce qui achève de mq $SO(n) \curvearrowright S^{n-1}$ transitivement.

On justifie ②. L'idée est que la matrice passage entre deux b.o.n est une matrice de $O(n)$. Si de plus, les deux bases ont la m̂ orientat par def $\det(P) > 0$. dc $P \in SO(n)$. [GOURDON] p242.

③ Si h_D est un retournement d'axe D de $SO(3)$ alors.

$$\forall g \in SO(3) \qquad g h_D g^{-1} = h_{g(D)}$$

soit $g \in SO(3)$. On mq : $g h_D g^{-1}$ est un retournem^t d'axe $g(D)$, càd,

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \qquad g h_D g^{-1}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in g(D) \\ -v & \text{si } v \in g(D)^\perp \end{cases}$$

Soit $v \in \mathbb{R}^3$. Si $v = g(x) \in g(D)$ alors :

$$g \cdot h_D \cdot g^{-1}(v) \underset{\substack{\uparrow \\ g^{-1}(v) = g^{-1}(g(x))}}{=} g \cdot h_D(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \in D \\ h_D \text{ stabilise } D}}{=} g(x) = v$$

Si $v \in g(D)^\perp$. On remarque que $g(D)^\perp = g(D^\perp)$ ⊛ car $g \in SO(3)$ donc preserve l'orthogonalité.
Dc $v = g(x) \in g(D^\perp)$. : On a.

$$g h_D g^{-1}(v) = g h_D(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \in D^\perp \\ \text{dc } h_D(x) = -x}}{=} g(-x) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ endomph} \\ \text{de linéaire}}}{=} -g(x) = -v.$$

De même on peut mq :

$$\forall g \in SO(n) \qquad g \cdot h_F \, g^{-1} = h_{g(F)}$$

où h_F est un retournement de $SO(n)$ qui stabilise un sous-espace F de Codim $= 2$.

Détails sur ⊗. [ROMBALDI]

Si $F \leq E$, $g \in O(E)$ et $g(F) \subset F$ alors :

$$g(F^\perp) = g(F)^\perp .$$

En effet, d'une part car g stabilise F, $F^\perp \subset g(F)^\perp$ et g stabilise également $F^\perp$ dc : $g(F^\perp) \subset F^\perp \subset g(F)^\perp$ ce qui donne une première inclusion.

Réciproquement, soit $y \in g(F)^\perp$. Alors :

$$\forall z = g(x) \in g(F) \quad \langle y, z \rangle = \langle y, g(x) \rangle = 0.$$

Or dans ce cas,

$$\langle y, g(x) \rangle = \langle g^{-1}(y), x \rangle = 0.$$

Dc $\forall y \in g(F)^\perp \qquad g^{-1}(y) \in F^\perp$

Dc $\forall y \in g(F)^\perp \qquad y = g(g^{-1}(y)) \in g(F^\perp)$.

D'où $g(F)^\perp \subset g(F^\perp)$.

④ Soit $H \triangleleft G$. Si $h \in H$ alors H contient la classe de conjugaison de h, notée $G \cdot h$.

Soit $h' \in G \cdot h$. Dc $h' = ghg^{-1}$ où $g \in G$.
Cm $H \triangleleft G$,

$$\forall x \in G \quad xHx^{-1} \in H$$

En particulier, $h' = ghg^{-1} \in H$.

Dc : $G \cdot h \subset H$.

⑤ Tout élément de $SO(3)$ est $O(3)$-semblable à une matrice de rotation, $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Soit $g \in SO(3)$. On cherche une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g est R_θ.

On remarque que R_θ admet 1 comme vp, on commence donc par mq c'est également le cas pour g

g est une transformat° orthogonale, donc ses vp sont de module 1.
En effet, si λ vp réelle de g et v un $\vec{vp}$ associé. On a,

$$\|g(v)\| = |\lambda| \, \|v\| \quad \text{et} \quad \|g(v)\| = \|v\|$$

D'où : $|\lambda| = 1$.

Dc les vp réelle de g sont ± 1

Soit λ vp complexe non réelle de g et $v \in \mathbb{C}^n$ un $\vec{vp}$ associé. (Note V vecteur des coordonnées de v ds base can. de $\mathbb{C}^n$, et $A = \mathrm{Mat}\, g$)

On a

$$\cancel{\langle g(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle.}$$

~~et~~

$$\cancel{\langle g(v), v \rangle = \langle v, g(v) \rangle = \lambda \langle v, v \rangle.}$$

Car $v \neq 0$, $\cancel{\bar{\lambda}} =$

$$\langle g(v), g(v) \rangle = \langle v, v \rangle$$

et

$$\langle g(v), g(v) \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \lambda \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle$$

Car $v \neq 0$ car $\vec{vp}$ alors $|\lambda|^2 = 1$, càd, $|\lambda| = 1$

~~Dans tous les cas, ± 1 est vp. de g~~

De plus, χ_g est de degré 3 impair donc il admet une racine réelle. au moins, notée λ. On a vu que. $\lambda = \pm 1$. Si χ_g possède une racine non réelle μ alors $\bar{\mu}$ est racine aussi.

Si 1 n'est pas vp alors -1 l'est. Si μ est une autre racine de χ_g réelle alors χ_g a -1 comme racine triple mais dans ce cas $\det g = (-1)^3 = -1$ ABS.

Dc les autres racines de g sont non réelles conjuguées. Mais alors $\det g = (-1) \cdot \mu \cdot \bar{\mu} = (-1) \cdot |\mu|^2 = -1$ ABS.

Dc -1 n'est pas vp de g. Dc nécessairement 1 l'est.

Il existe donc un $\vec{vp}$ non nul associé à 1 qu'on peut choisir de norme 1 : $g(v) = v$.
Note $D = \mathbb{R}v$ et cod $D^\perp$ muni d'une b.o.n. (v', v''). Puisque g stabilise D et $g \in SO(3)$ alors il stabilise $D^\perp$. L'induit par g sur $D^\perp$ est donc une transformation orthogonale de determinant 1. : une rotation plane.

Dc dans la base orth (v', v''),

$$\mathrm{Mat}(g_{D^\perp}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

les éléments de $O(2)$ sont de 2 types seulement et les rotations planes est l'un des deux.

Dc

$$\mathrm{Mat}_{\underline{v}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\mathrm{Mat}_{(v',v'')}(g_{D^\perp})}} \\ 0 & & \end{pmatrix} = R_\theta .$$

Si on note P la matrice de passage de la b.o.n canonique de $\mathbb{R}^3$ à la bon $\underline{v}$ on a,

$$\begin{cases} g = P R_\theta P^{-1} \\ P \in O(3) \end{cases}$$

On remarque que

$$\mathrm{tr}(R_\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

La trace étant invariante par changement de base :

$$\mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(P R_\theta P^{-1}) = \mathrm{tr}(R_\theta) = 1 + 2\cos\theta .$$

<u>Retour sur le cas de la preuve:</u>

Ici il faut remarquer que comme $h \in SO(3)$ pour tout $g \in SO(3)$, $ghg^{-1}h^{-1} \in SO(3)$ car $SO(3)$ est un groupe.

En tant qu'élément de $SO(3)$, pour tout $g \in SO(3)$, $ghg^{-1}h^{-1}$ est donc $O(3)$-semblable à une rotation et on peut donc lui associer un angle θ et sa trace est celle de R_θ.

⑥ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $SO(n)$ connexe par arc

On le montre pour $SO(3)$ puis on généralise grâce à un résultat de réduction sur les matrices orthogonales

<u>Cas $SO(3)$</u>: tout $g \in SO(3)$ est relié à id par un chemin continu contenu dans $SO(3)$.

Soit $g \in SO(3)$. On vient de voir qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $P \in O(3)$ tq: $\quad g = P R_\theta P^{-1}$.

On pose:

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow SO(3)$$
$$t \longmapsto P R_{t\theta} P^{-1}$$

Alors γ est continue, $\gamma([0,1]) \subset SO(3)$ et

$$\gamma(0) = P R_0 P^{-1} = I_3$$

$$\gamma(1) = P R_\theta P^{-1} = g.$$

<u>Cas SO(n)</u>: Soit $g \in SO(n)$. Il existe une bon $\mathcal{B}$ dans laquelle g s'écrit

$$R := \begin{pmatrix} I_p & & & 0 \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix} \qquad \text{où } p + 2r = n.$$

Note P matrice de passage de la base can à $\mathcal{B}$ alors $P \in O(n)$ et

$$g = P R P^{-1}.$$

On pose:

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow SO(n)$$
$$t \longmapsto P \begin{pmatrix} I_p & & & 0 \\ & R_{t\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_{t\theta_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

alors γ continue, $\gamma([0,1]) \subset SO(n)$ et $\gamma(0) = I_n$, $\gamma(1) = g$.

7 $SO(n)$ est compact $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque $SO(n)$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dim finie il suffit de mq 'il est fermé, borné.

Il est borné car inclu ds $O(n)$ qui est fermé car compact.

De plus :
$$SO(n) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$
$$= \det^{-1}(\{1\}) \cap O_n(\mathbb{R})$$

dc $SO(n)$ est fermé comme intersection de 2 fermés.

8 $\varphi(SO(3)) = [a, 3]$.

φ continue et $SO(3)$ est connexe compact donc $\varphi(SO(3))$ est un connexe compact de $\mathbb{R}$, càd, un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

$SO(3)$ contient id, or

$$\varphi(id) = 1 + 2\cos(0) = 3$$

Dc $\varphi(SO(3))$ contient 3.

En fait,

$$\forall g \in SO(3) \quad \varphi(g) = 1 + 2\cos\theta \leq 1 + 2 = 3.$$

Dc $\varphi(SO(3))$ est borné par 3.

Finalement, $\varphi(SO(3))$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ borné par 3 : $\varphi(SO(3)) = [a, 3]$.

⑨ $Z(SO(n)) = \begin{cases} \{id\} & \text{si } n \text{ impair} \\ \{-id, id\} & \text{si pair} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ [NH262-TII] p17.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in Z(SO(n))$. Il suffit de mq z est une homothétie, càd, stabilise toutes droites de $\mathbb{R}^n$.
En effet, dans ce cas z est une transformat de la forme $x \mapsto \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Dc sa matrice représentative est $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$. Or $z \in SO(n)$ donc $\det(z) = \prod_{i=1}^{n} \lambda = 1$, càd, $\lambda^n = 1$.

D'où $\begin{cases} \lambda = 1 & \text{si } n \text{ impair} \\ \lambda = \pm 1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

Reste à mq z est une homothétie. Soit H un plan qcq de $\mathbb{R}^n$ ~~et s la réflexion par rapport à $D^\perp$. Comme z commute avec tout éléments de $SO(n)$~~

Soit $h \in SO(n)$ le retournement qui stabilise $H^\perp$. Comme $z \in Z(SO(n))$ il commute avec h. Dc z stabilise tout espace propre de h et en particulier le plan H. Ceci étant vrai pour tout plan H qcq : z stabilise tout plans et comme toute droite se réalise comme intersection de 2 plans, z stabilise toutes droites de $\mathbb{R}^n$.